UNIVERSITE ABD EL MALEK ESSAADI
Ecole National des Sciences Appliquées
Tétouan

Année universitaire 2010/2011
Physique1 (CP1)

TD DE PHYSIQUE1 (Electrostatique)
(Série 3)

Exercice 1

Dans l'espace, de repère orthonormé (O, x, y, z), on place une charge $q > 0$ au point A de coordonnées (0, 0, 2R) et une charge $(-q / 2)$ au point B de coordonnées (0, 0, R / 2).
Trouver l'équation, en coordonnées cartésiennes, de la surface équipotentielle $V = 0$ du système formé par les deux charges ; préciser sa nature.

Exercice 2

Un disque mince de rayon R porte une distribution de charge $-\sigma$ (σ est une constante positive). Déterminer :

1- L'expression électrique en un point situé sur l'axe de révolution du disque
2- Le potentiel électrique en ce point
3- Vérifier la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

Exercice 3

Une charge positive q est placée au point M d'abscisse $x > 0$ d'un axe x'ox, de vecteur unitaire $\vec{e}_x$
Deux charges -6 q et 2q sont fixées respectivement aux points d'abscisses $(-a)$ et 0 $(a > 0)$ de l'axe x'ox.

1- Calculer l'énergie potentielle électrostatique $E_p(x)$ de la charge q
2- Exprimer en fonction de a et q l'énergie potentielle minimale.
3- Déterminer l'énergie mutuelle W_m du système des trois charges (-6q, +2q et q) étudié.
4- Déterminer la force électrostatique qui agit sur la charge q.

Exercice 4

On a un fil rectiligne infini chargé uniformément avec la densité de charge $\lambda = 0{,}4\ \mu C/m$
Calculer la différence de potentiel entre les points 1 et 2 si le point 2 est placé à une distance deux fois supérieure à la distance du point 1 au fil



Exercice 5

Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrique créé en un point quelconque par distribution volumique de charge de densité ρ uniforme, limitée par une surface cylindrique de rayon a et infinie dans la direction de son axe.
Représenter les variations du champ. Ce champ présente –t-il une discontinuité aux frontières

Exercice 6

Deux surfaces cylindriques métalliques infinies et coaxiales de rayon a et b portent respectivement les charges - λ et + λ par unité de longueur. Calculer le champ électrostatique créé en un point quelconque M.

Exercice 7

Un distribution volumique comprise entre les sphères de centre O et de rayon a et b a pour densité volumique ρ :
$\rho = 0$ si $r < b$ et si $r > a$
$\rho = \rho(r)$ si $b < r < a$

1- Calculer le champ et le potentiel
2- Cas particulier ρ est constante si $b < r < a$. Tracer les courbes E(r) et V(r).
3- En déduire le champ et le potentiel d'une sphère de rayon a uniformément chargée.

Exercice 8

Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrique crée en un point quelconque par une sphère de centre O et de rayon R portant une densité surfacique σ constante. Représenter les variations du champ. Conclure

Exercice 9

Soit un champ uniforme $\vec{E}_0$ créant en un point O un potentiel V_0. En O, on place un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ parallèle à $\vec{E}_0$ et de même sens.
1- Calculer le potentiel créé en un point M à une grande distance.
2- En déduire qu'il existe une équipotentielle sphérique dont on déterminera le rayon.
3- Calculer le champ en M.



Serie 3 ES

Ex 2 :

1) $\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{e_x}$

si on utilise l'axe de révolution et l'axe OZ

$\Rightarrow OM = z$

$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{e_z}$

2) $dV = ?$

$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

$= \frac{-\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

$= \frac{-\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$

$dV = \frac{-\sigma\, r\,dr\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$

donc

$V = \iint \frac{-\sigma\, r\,dr\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$

$= \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0 \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$

$= \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_0$

$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+r} - z\right)$

3) D'après donc les règles d'invariances puisque la distribution de charges ne dépend pas de θ le champ et le pot E et V ne dépendent pas de θ

r est ... il reste que l dépendance vis-à-vis de z

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{e_z}$$

$$\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

$\Rightarrow$ relation vérifiée

Ex 3 :

1) $E_p = q \cdot V(M)$

$V(M) = V_A + V_B$

$$= \frac{-6q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

Donc

$$E_p = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x+a}\right)$$

$$= \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a-2x}{x(x+a)}\right)$$

2) $$\frac{dE_p}{dx} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{3}{(x+a)^2}\right)$$

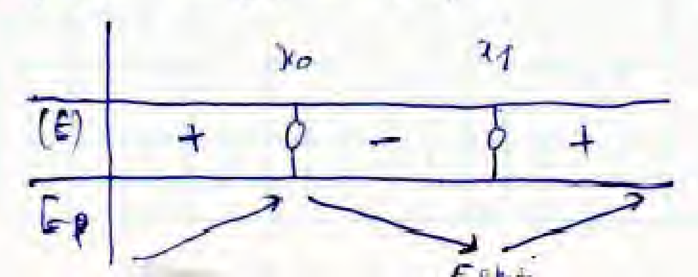
$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \iff \frac{1}{x^2} = \frac{3}{(x+a)^2}$$

$$\iff 3x^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$\iff x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$$

On a $x > 0$

Donc $x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$





$E_{p_{min}} = E_p(x = x_1)$

Donc

$$E_{p_{min}} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a(1+\sqrt{3})} - \frac{3}{\frac{a}{2}(1+\sqrt{3})+a}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\sqrt{3}}{a(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}\right)$$

3) $E_m = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$

$$E_m = \frac{1}{2}\left(\frac{-6q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{a} + \frac{q}{x+a}\right) + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-6q}{a} + \frac{q}{x}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-6q}{x+a} + \frac{2q}{x}\right)\right)$$

Après développement on a :

$$E_m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x+a} - \frac{6}{a}\right)$$

4)

$\vec{F} = q\vec{E}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$= -\frac{dV}{dx}\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -q\frac{dV}{dx}\vec{e_x}$$

$$= -\frac{dE_p}{dx}\vec{e_x}$$

$\Rightarrow \vec{F} =$

(A retrouver le résultat en utilisant le cal. direct de $\vec{F}$)



Serie 3 (ES)

Exercice 5

On distingue 2 régions :

1) - M ∈ l'ext de (S)

2) - M ∈ l'int de (S)



1er cas :

Mê raisonnement que l'ex (4)

⇒ Surf de Gauss Σ

Cylindre de rayon ($r > a$)

et de long arbitraire L

$$\Rightarrow \iint \vec{E}\, \vec{dS} = E\, S_{L(\Sigma)}$$

$$= E(r) \cdot 2\pi r L$$

$Q_{int}(\Sigma) = ?$

on a $Q_{int} = \iiint \rho \cdot dV$

$$= \rho \iiint dV$$

$$= \rho \iiint r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho \int_0^a r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz$$

$$= \rho \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^a [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L$$

$$= \rho \frac{1}{2} a^2 2\pi L$$

$$= \rho a^2 \pi L$$

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\rho a^2 \pi L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho a^2 \pi L}{\varepsilon_0 2\pi r L} = \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0 2 r} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{a_r}$$

2ème Cas :

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(r)\, 2\pi r L$$

$$Q_{int} = \rho \iiint dV$$

$$= \rho \int_0^r r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz$$

$$= \rho \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^r \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^L$$

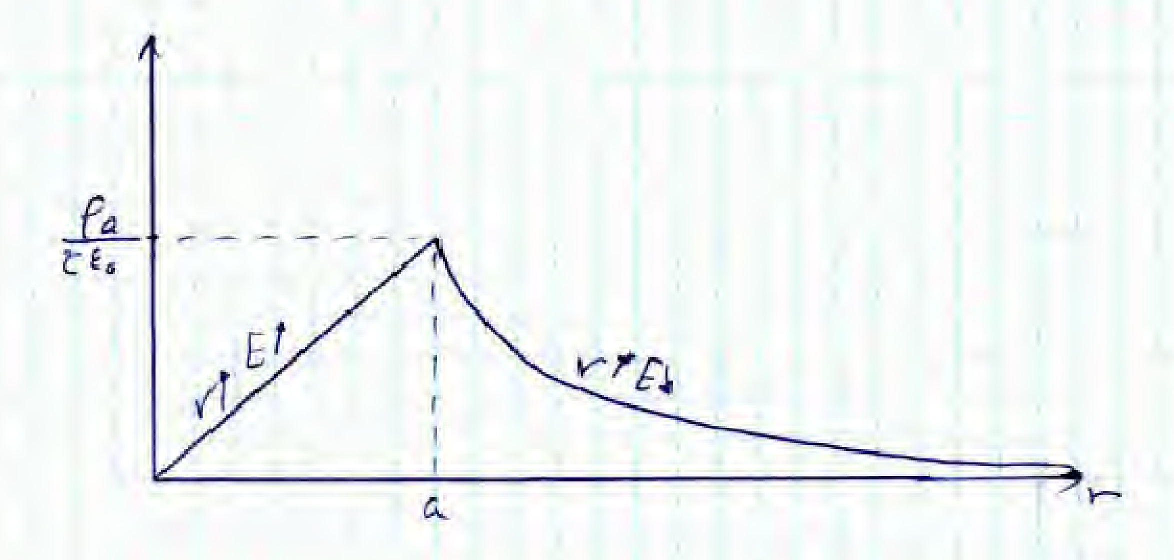
$$= \rho\, \tfrac{1}{2} r^2\, 2\pi L$$

$$= \rho r^2 \pi L$$

D'après th Gauss

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\rho r^2 \pi L}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\, \vec{e_r}$$



Exercice 6

Ici, on va distinguer 3 régions :

1er cas : M à l'ext

2ème cas : M entre les 2 cylindres

$$a < r < b$$

3ème cas : M est à l'ext du cylindre de rayon

3ème cas :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(r) 2\pi r L$$

$Q_{int(\Sigma)} = 0$ (pas de charge à l'int de cylindre)

$\Rightarrow E(r) = 0$

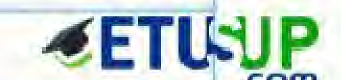
2ème cas :

$$Q_{int(\Sigma)} = -\lambda L$$

1er cas :

$$Q_{int} = Q_{(-\lambda)} + Q_{(+\lambda)}$$
$$= -\lambda L + \lambda L$$
$$= 0$$

$\Rightarrow E(r) = 0$



Exercice 9.

Rappel : $-q$ ×(A) — — O $\vec{p}$ — — ×(B) $+q$, a ; M, r ; $r \gg a$

$\vec{p} = q.\vec{AB}$

$(- +) \equiv \vec{p}$

$\vec{E_0}$ → — — — O, $\vec{p}$, θ, r, M — — — → x

$V_T(M) = V_1 + V_2$

V_1 : Pot. créé par le dipôle au point M

$\Rightarrow V_1 = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

V_2 : potentiel à partir duquelle dérive $\vec{E_0}$ au pt M.

$V_2 = V_0(M)$

On a $\vec{E} = -\vec{grad}V$

$\Leftrightarrow E_0 \cdot \vec{e_x} = \frac{dV}{dx} \vec{e_x}$

$\Leftrightarrow V = -\int E_0 dx$

$V(O) = V_0 = E_0 \cdot 0 = 0 + cte = cte$

$\Rightarrow cte = V_0$

$V = -E_0 x + V_0$

$V_2 = V(M) = -E_0 x_M + V_0$

$= -E_0 r \cos\theta + V_0$

Autrement

$\int_{V_0}^{V_2} dV = \int_0^{x = x_M} E_0 dx$

$V_0 - V_2 = E_0 [x_M - 0]$

$= E_0 r \cos\theta$

$\Rightarrow V_{Tot}(M) = V_0 - E_0 r \cos\theta + \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$= V_0 + \cos\theta \left(-E_0 r + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)$

2- ~~Vte~~ Pour avoir une équipotentielle sphérique il faut avoir V indépendante de θ alors qu'on doit avoir

$-E_0 + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$

$E_0 r^3 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}$

$r = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$

~~[illegible]~~ C'est le rayon de la surface équipotentielle dont le pot est V_0

3) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$= -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$

V ne dépend de φ ⇒ $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$

$\vec{E}(M) = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta}$

$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \cos\theta\left(E_0 + \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$

$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\sin\theta$

